Ergänzung zum Beitrag in FA 10/15, S. 1068 f. „O'zapft is – Schwingkreise mit Widerstandstransformation"

Ergänzend zur gedruckten Ausgabe werden hier einige Herleitungen der im Beitrag vorgestellten Formeln gezeigt. Die Gleichungen sind hier jedoch nach R_1 aufgelöst.

Widerstandstransformation mit induktiver Teilankopplung

Es gilt näherungsweise

$$R_1 = R_2 \left(1 + \frac{L_1 + M}{L_2 + M}\right)^2, \quad (4a)$$

wobei M die Gegeninduktivität ist. Mit dem Koppelfaktor

$k \leq 1{,}0$

ist die rechnerisch schwer erfassbare Gegeninduktivität M in der Form

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 L_2} \quad (5)$$

darstellbar. In (4a) eingesetzt gelangen wir zu

$$R_1 = R_2 \left(1 + \frac{L_1 + k \cdot \sqrt{L_1 L_2}}{L_2 + k \cdot \sqrt{L_1 L_2}}\right)^2. \quad (5b)$$

Hier wenden wir uns lediglich dem zweiten Spezialfall zu:

Induktive Teilankopplung mit perfekter magnetischer Kopplung

Besteht zwischen L_1 und L_2 eine nahezu perfekte magnetische Kopplung, etwa so, dass L_1 und L_2 hintereinander fest auf einen Ringkern gewickelt sind, wird $k = 1$. Gl. (5b) verändert sich zunächst zu

$$R_1 = R_2 \left(1 + \frac{L_1 + \sqrt{L_1 L_2}}{L_2 + \sqrt{L_1 L_2}}\right)^2. \quad (8a)$$

Bringt man alles auf einen Bruchstrich, so wird daraus

$$R_1 = R_2 \left(\frac{L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2}}{L_2 + \sqrt{L_1 L_2}}\right)^2, \quad (8a)$$

wobei wir im Zähler eine binomische Formel erkennen, die zu der Vereinfachung

$$R_1 = R_2 \left(\frac{(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2}{L_2 + \sqrt{L_1 L_2}}\right)^2, \quad (8c)$$

führt. Weil L_1 und L_2 bei Annahme perfekter magnetischer Kopplung den selben magnetischen Widerstand gemäß $L = w^2/ R_m$ besitzen, können wir statt Induktivitäten Windungszahlen einsetzen

$$R_1 = R_2 \left(\frac{(w_1 + w_2)^2}{w_2^2 + w_1 w_2}\right)^2 \quad (13a)$$

und im Nenner noch w_2 ausklammern

$$R_1 = R_2 \left(\frac{(w_1 + w_2)^2}{w_2 (w_1 + w_2)}\right)^2 \quad (9)$$

wodurch wir letztlich zu

$$R_1 = R_2 \left(\frac{w_1 + w_2}{w_2}\right)^2 \quad (9d)$$

oder mit $w_1 + w_2 = w_{ges}$ zu

$$R_1 = R_2 \left(\frac{w_{ges}}{w_2}\right)^2 \quad (9e)$$

gelangen.

Teilankopplung bei zu starker Belastung an der Anzapfung

Die Schwingkreis-Widerstandstransformation setzt ein Widerstandverhältnis von $X_L > 10 \cdot R_2$ voraus (Bild 2). Die Resonanzfrequenz lässt sich mit

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (12)$$

bestimmen. Sind die vorgenannten Bedingungen aber nicht erfüllt, so ergibt sich die Resonanzfrequenz nun nach der Formel

$$f_p = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \left(\frac{R_L}{L}\right)^2} \quad (13)$$

Bei fest vorgegebener Frequenz lässt sich die serielle Verschaltung von R_s und L_s in eine parallele Verschaltung aus R_p und L_p umwandeln. Dabei gilt:

$$L_p = \frac{R_s + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_s)^2}{(2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot L_s} \quad (14)$$

$$R_p = \frac{R_s^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_s)^2}{Rs} \quad (15)$$

Für X_p in Bild 4c wird ein Betrag von 1 angenommen. Die Serienkapazität C_s (Bild 4e) ergibt sich nach

$$C_s = \frac{1}{X_s} \cdot C_p \quad (16)$$

und die Serieninduktivität (Bild 4f) nach

$$L_s = X_s \cdot L_p \quad (17)$$

Tabelle 1 enthält die Werte für $R_p = 0{,}5 \cdot X_p$ bis $R_p = 30 \cdot X_p$.

Die Bestimmung der Werte der Gesamtschaltung kann nun durch die Zusammenfassung der oberen und unteren Schaltungsteile (Bild 4a bzw. Bild 4b) erfolgen. Die direkte Umrechnung der parallelen in eine serielle Verschaltung ist für die RC-Kombination mit

$$C_s = C_p \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot {}_f \cdot C_p \cdot R_p}\right)^2\right] \quad (18)$$

und

$$R_s = \frac{R_p \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_p}\right)^2}{R_p^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_p}\right)^2} \quad (19)$$

sowie für die RL-Kombination mit

$$L_s = \frac{L_p \cdot R_p^2}{R_p^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_p)^2} \quad (20)$$

und

$$R_s = \frac{R_p \cdot (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_s)^2}{R_p^2 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_s)^2} \quad (21)$$

möglich.