Ergänzung zum Beitrag in FA 11/16, S. 1034 ff. „Dämpfung und Verkürzungsfaktor von Zweidrahtleitungen“

Wie angekündigt zeigen wir hier noch die Herleitung der im Beitrag erwähnten Gleichungen (12) bis (14).

Impedanz am Anfang einer verlustbehafteten Leitung

Die Impedanz Z_A am Anfang einer verlustbehafteten Leitung, die mit der Impedanz Z_E abgeschlossen ist, ergibt sich aus den Leitungsgleichungen allgemein zu:

$$Z_A = Z_L \cdot \frac{Z_E + Z_L \cdot \tanh(\gamma l)}{Z_L + Z_E \cdot \tanh(\gamma l)} . \tag{3}$$

Dabei sind Z_L der Wellenwiderstand der Leitung, l ihre Länge und γ die Ausbreitungskonstante. γ setzt sich gemäß

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{4}$$

aus der gesuchten Dämpfungskonstante α sowie der Phasenkonstante β zusammen, ist also eine komplexe Größe. Damit ist Gl. (3) eine komplexwertige Gleichung, die sich im allgemeinen Fall nicht analytisch nach α auflösen lässt. Dies gelingt jedoch für die Frequenzen der Leitungsresonanzen. Dazu sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Die elektrische Leitungslänge entspricht $\lambda/4$ oder einem ungeradzahligen Vielfachen davon ($3 \cdot \lambda/4$, $5 \cdot \lambda/4$, …). Mit $\beta = 2\pi/\lambda$ folgt aus Gl. (4):

$$\gamma l = \alpha l + j \frac{2\pi}{\lambda} l = \alpha l + j \frac{\pi}{2} . \tag{5}$$

Nach Zwischenrechnung vereinfacht sich der komplexe *tanh*-Ausdruck aus Gl. (3) in einen reellen Ausdruck

$$\tanh(\gamma l) = \frac{1}{\tanh(\alpha l)} . \tag{6}$$

Damit geht Gl. (3) über in

$$Z_A = Z_L \cdot \frac{Z_E \cdot \tanh(\alpha l) + Z_L}{Z_L \cdot \tanh(\alpha l) + Z_E} . \tag{7}$$

Diese Gleichung lässt sich nach αl analytisch auflösen:

$$\alpha l = \operatorname{artanh}\left(\frac{Z_L^2 - Z_A Z_E}{Z_L (Z_A - Z_E)}\right) . \tag{8}$$

Fall 2: Die elektrische Leitungslänge entspricht $\lambda/2$ oder Vielfachen davon ($2 \cdot \lambda/2$, $3 \cdot \lambda/2$, …). Dann folgt aus Gl. (4):

$$\gamma l = \alpha l + j\pi . \tag{9}$$

Nach ähnlichen Umformungen wie in Fall 1 folgt:

$$\alpha l = \operatorname{artanh}\left(\frac{Z_L (Z_A - Z_E)}{Z_L^2 - Z_A Z_E}\right) . \tag{10}$$

αl wird als **Leitungsdämpfung** bezeichnet, die dimensionslos ist. Trotzdem hat sich für dieses Dämpfungsmaß die Einheit Neper (*Np*) eingebürgert. Die Umrechnung in die gebräuchliche Einheit Dezibel (dB) geschieht über

$$1\ Np = 8{,}686\ \text{dB} . \tag{11}$$

Damit folgen aus Gl. (8) und Gl. (10) die Dämpfungsmaße in dB:

$\lambda/4$-Resonanztyp:

$$\alpha l = \operatorname{artanh}(A) \cdot 8{,}686 \tag{12}$$

$\lambda/2$-Resonanztyp:

$$\alpha l = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{A}\right) \cdot 8{,}686 \tag{13}$$

mit

$$A = \frac{Z_L^2 - Z_A Z_E}{Z_L (Z_A - Z_E)} \tag{14}$$

Impedanz einer Leitung

Die exakte Form der im Beitrag erwähnten Gleichung (17) lautet

$$Z_L = \frac{120\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{d}\right) ; \tag{16}$$

darin ist $\operatorname{arcosh}(x)$ die Umkehrfunktion des Hyperbelcosinus. Für große x gilt dann unter der Bedingung $a/d > 3{,}6$ die Näherung

$$Z_L = \frac{120\ \Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \ln\left(\frac{2a}{d}\right) , \tag{17}$$

wobei der Fehler von Z_L dann kleiner als 1 % bleibt.