# Ergänzung zur Auflösung der “Zeppelin-Preisfrage” aus dem FA 11/16 in der Postbox 1/17 unter “Kompliziert” auf S. 7

Unsere Zeppelin-Preisfrage vom November 2016 sah auf den ersten Blick einfacher aus, als sie es tatsächlich ist: Ein 40 m langer ($L$) Strahler einer Zeppelin-Antenne für das 80-m-Band soll so aufgehängt werden, dass er gerade maximal 3 m ($h$) durchhängt. Wie weit ($d$) müssen dazu die Abspannpunkte voneinander entfernt sein?

Bei einer Zeppelin-Antenne befindet sich zwischen den Abspannpunkten nur der gleichförmige Draht. Die Bogen, den der Draht bildet, ist eine sogenannte Kettenlinie, die einer Cosinus-Hyperbolicus-Funktion folgt. Die Suche nach Lösungen im Internet kann sich für einen mathematisch nicht sehr Beschlagenen durchaus mühselig gestalten. Auch Wikipedia hilft dann unter *Kettenlinie* nicht viel weiter. Eine Google-Suche nach *Bogenlänge Kettenlinie* führt dann aber auf den Link *www2.iazd.uni-hannover.de/~erne/Mathematik3/dateien/maple/MB_10_2.pdf* mit einem (Teil-)Aufsatz *10.2 Bogenlänge ebener Kurven* mit dem *Beispiel 8: Kettenlinien*, das auf Seite 11 die gesuchte Beziehung

$$d = \frac{L^2 - 4 \cdot h^2}{4\,h} \operatorname{arcosh}\left(\frac{L^2 + 4 \cdot h^2}{L^2 - 4 \cdot h^2}\right)$$

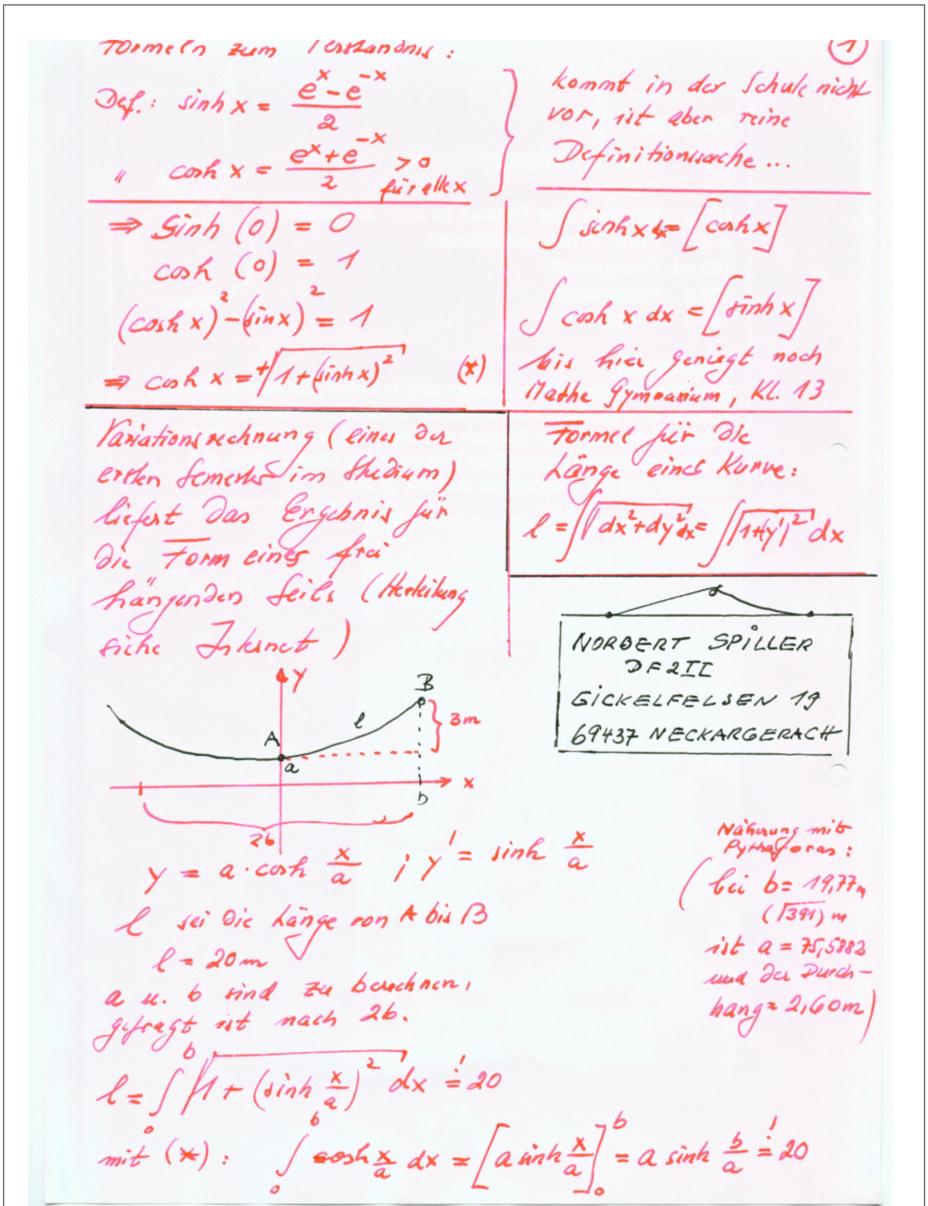
mit $L$ für die Antennendrahtlänge, $h$ für den angestrebten Durchhang und $d$ für den sich daraus ergebenden, gesuchten Abstand der Befestigungspunkte mit $L$ = **39,3972 m** liefert. Eine Auflösung dieser Beziehung nach $h$ oder $L$ ist jedoch nicht möglich und man ist dann tatsächlich auf Näherungslösungen durch Iteration angewiesen.

Außerdem enthält die Quelle die Herleitung und viele zusätzliche Informationen. arcosh ist die Umkehrfunktion von Cosinus Hyperbolicus oder einfach Areacosinus Hyperbolicus. Die Berechnung über eine Parabel ist übersichtlicher, aber je nach Durchhang mehr oder weniger unexakt, wobei die Differenzen in der Regel oft nicht relevant sind.

Beigefügt ist eine kleine Excel-(2007-)Tabelle *Abstandsberechnung-Kettenlinie.xls* zur Berechnung unseres Abspannpunkt-Abstands. Zur besseren Übersicht wurde die Formel dazu aufgeteilt. Insbesondere wäre sie noch von Nutzen, wenn man $h$ oder $L$ bestimmen möchte, indem man für $h$ oder $L$ so lange andere Werte eingibt, bis der richtige für $d$ erscheint.

Bei der Nutzung ist zu beachten, dass die Excel-Funktion für arcosh je nach Version verschieden ist: Excel 2007 und Libre Office 5.1 Calc: ARCCOSHYP, Excel 2010: ACOSH.

Einen anderen Lösungsweg beschritt Norbert Spillner, DF2II. Wir haben ihn als Bilder beigefügt. Andere Einsender gingen im Detail offenbar noch andere Wege, ohne sie allerdings näher auszuführen.



Formeln zum Verständnis:

(1)

Def.: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

" $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ für alle x

kommt in der Schule nicht vor, ist aber reine Definitionssache …

$\Rightarrow \sinh(0) = 0$

$\cosh(0) = 1$

$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$

$\Rightarrow \cosh x = +\sqrt{1 + (\sinh x)^2}$ (*)

$\int \sinh x\, dx = [\cosh x]$

$\int \cosh x\, dx = [\sinh x]$

bis hier genügt noch Mathe Gymnasium, Kl. 13

Variationsrechnung (eines der ersten Semester im Studium) liefert das Ergebnis für die Form eines frei hängenden Seils (Herleitung siehe Internet)

Formel für die Länge einer Kurve:

$l = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$

NORBERT SPILLER
DF2II
GICKELFELSEN 19
69437 NECKARGERACH

Y, B, A, $l$, 3m, a, x, b, 2b

$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$ ; $y' = \sinh \frac{x}{a}$

$l$ sei die Länge von A bis B

$l = 20\,m$

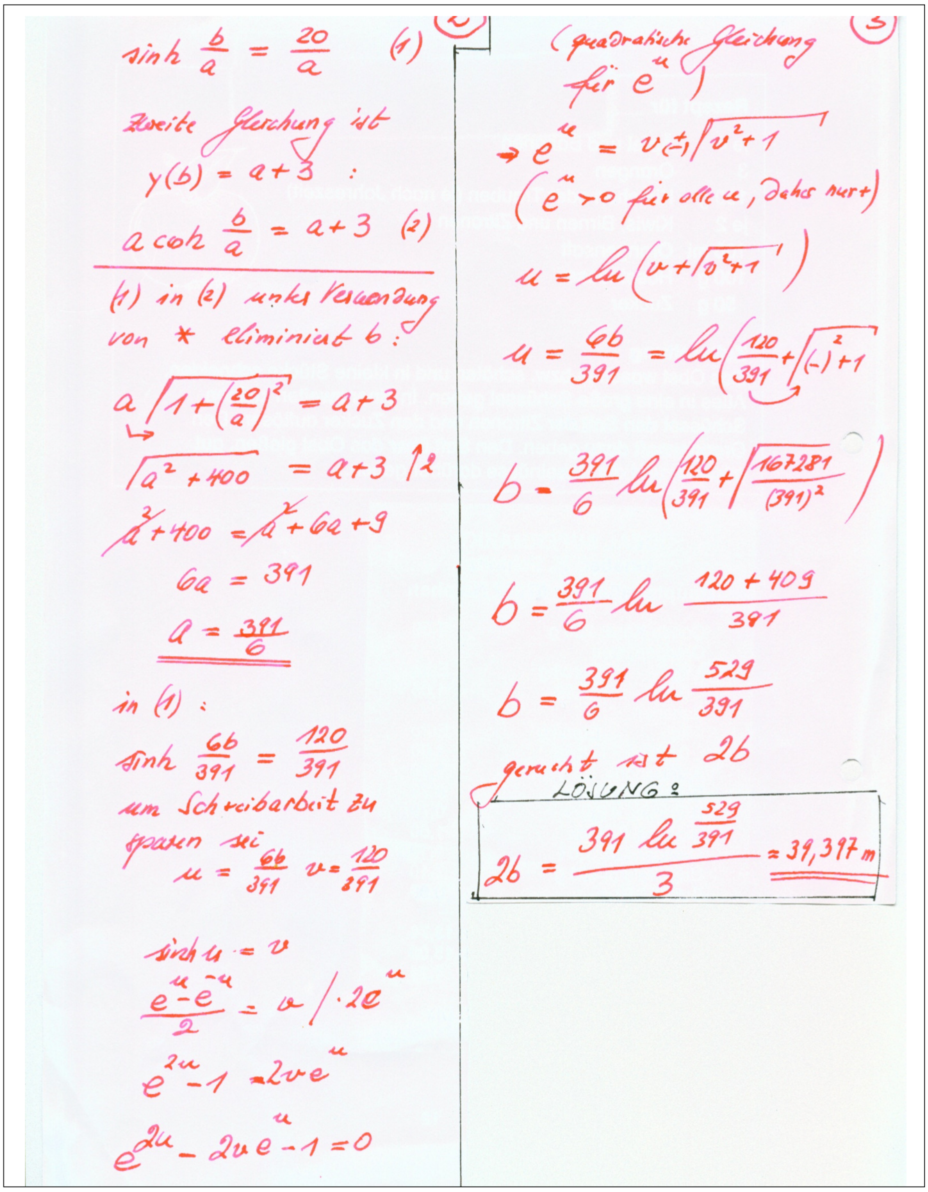
a u. b sind zu berechnen, gefragt ist nach 2b.

Näherung mit Pythagoras: (bei b = 19,77 m ($\sqrt{391}$) m ist a = 75,5882 und der Durchhang = 2,60 m)

$l = \int_0^b \sqrt{1 + (\sinh \frac{x}{a})^2}\, dx \stackrel{!}{=} 20$

mit (*): $\int_0^b \cosh \frac{x}{a}\, dx = \left[a \sinh \frac{x}{a}\right]_0^b = a \sinh \frac{b}{a} \stackrel{!}{=} 20$

**Bild 1: Erster Teil des Lösungswegs von Norbert Spillner, DF2II**



2

$$\sinh\frac{b}{a} = \frac{20}{a} \qquad (1)$$

Zweite Gleichung ist $y(b) = a+3$ :

$$a\cosh\frac{b}{a} = a+3 \qquad (2)$$

(1) in (2) unter Verwendung von * eliminiert b:

$$a\sqrt{1+\left(\frac{20}{a}\right)^2} = a+3$$

$$\sqrt{a^2+400} = a+3 \quad |^2$$

$$\cancel{a^2}+400 = \cancel{a^2}+6a+9$$

$$6a = 391$$

$$\underline{\underline{a = \frac{391}{6}}}$$

in (1) :

$$\sinh\frac{6b}{391} = \frac{120}{391}$$

um Schreibarbeit zu sparen sei $u = \frac{6b}{391}$ $v = \frac{120}{391}$

$$\sinh u = v$$

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = v \quad |\cdot 2e^u$$

$$e^{2u} - 1 = 2ve^u$$

$$e^{2u} - 2ve^u - 1 = 0$$

3

(quadratische Gleichung für $e^u$)

$$\Rightarrow e^u = v \overset{+}{(-)} \sqrt{v^2+1}$$

($e^u > 0$ für alle u, daher nur +)

$$u = \ln\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)$$

$$u = \frac{6b}{391} = \ln\left(\frac{120}{391}+\sqrt{(\;)^2+1}\right)$$

$$b = \frac{391}{6}\ln\left(\frac{120}{391}+\sqrt{\frac{167281}{(391)^2}}\right)$$

$$b = \frac{391}{6}\ln\frac{120+409}{391}$$

$$b = \frac{391}{6}\ln\frac{529}{391}$$

gesucht ist 2b

LÖSUNG:

$$\boxed{2b = \frac{391\ln\frac{529}{391}}{3} \approx \underline{\underline{39{,}397\text{ m}}}}$$

**Bild 2: Zweiter Teil des Lösungswegs von Norbert Spillner, DF2II**